2024ko maiatzak 20an Kalkulua

OHIKO DEIALDIKO AZTERKETA (1. eta 2. partzialak)

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Guztira

Iraupena: 2 ordu

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Kalkulatu hurrengo limiteak:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)}{\mathrm{L}\left(n^2\right)}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+3)\cdot\mathrm{L}\left(\left(\dfrac{n+3}{n-2}\right)^5\right)$

(2 puntu)

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)}{\mathrm{L}\left(n^2\right)}\overset{(*)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\mathrm{L}\left(\sqrt[n]{n}\right)}{\mathrm{L}\left(n^2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{n}\cdot\mathrm{L}(n)}{2\cdot\mathrm{L}(n)}=\frac{1}{2}$$

(*) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1$$

b) $$\lim_{n\to\infty}(2n+3)\cdot\mathrm{L}\left(\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^5\right)=\lim_{n\to\infty}5\cdot 2n\cdot\mathrm{L}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)=\lim_{n\to\infty}10n\left(\frac{n+3}{n-2}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10n(n+3-n+2)}{n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{50n}{n-2}=50$$

2.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \mathrm{L}n}{a^n}$, $\forall a > 0$, seriearen izaera.

(1.5 puntu)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n = \frac{n^2 + \mathrm{L}n}{a^n} > 0 \quad \forall a > 0$ eta $\forall n$

Konbergentziarako baldintza beharrezkoa erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \mathrm{L}n}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{a^n} \begin{cases} 0 & \forall a > 1 \\ \infty & \forall a \le 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \forall a \le 1, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da.}$$

Eta, $\forall a > 1$, Dalambert-en irizpidea aplikatuko diogu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^2} = \frac{1}{a} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da.}$$

3.- a) Aurkitu $f(x)=\arctan\left(x^3\right)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

b) Zein da $f^{15)}(0)$-ren balioa?

(2.5 puntu)

a) $f(x)=\arctan\left(x^3\right) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^6} \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 3x^2\cdot\left(-x^6\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3\cdot x^{6n+2} \quad \forall x\in(-1,1)$

(1) Serie geometrikoaren batura da, $r=-x^6 \Rightarrow$ konbergentea da $\Leftrightarrow |r|=x^6<1 \Leftrightarrow |x|<1$

Eta, emaitza hori integratuz:

$$f(x)=\arctan\left(x^3\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3\cdot\frac{x^{6n+3}}{6n+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{6n+3}}{2n+1} \quad \forall x\in(-1,1)$$

$$x=-1 \text{ puntuan } \begin{cases} \exists f(-1)=\arctan(-1)=-\dfrac{\pi}{4}, \text{ eta, } f \text{ jarraitua da} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{6n+3}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \text{ konbergentea da (*)} \Rightarrow \text{ batura jarraitua da} \end{cases}$$

$$x=1 \text{ puntuan } \begin{cases} \exists f(1)=\arctan(1)=\dfrac{\pi}{4}, \text{ eta, } f \text{ jarraitua da} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{6n+3}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1} \text{ konbergentea da (*)} \Rightarrow \text{ batura jarraitua da} \end{cases}$$

(*) Kasu bietan, absolutuki konbergenteak ez diren serie alternatuak dira, baina Leibnizen teorema egiaztatzen dute.

Beraz, $f(x)=\arctan\left(x^3\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{6n+3}}{2n+1} \quad \forall x\in[-1,1]$

b) Lortutako garapena, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{6n+3}}{2n+1}$, $f(x)=\arctan\left(x^3\right)$ funtzioari dagokion Taylor-en seriea da, hau da, $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{n)}(0)}{n!}\cdot x^n$.

Beraz, serie biak konparatuz, x^{15} batugaiaren adierazpena lortzeko:

$$6n+3=15 \quad\Leftrightarrow\quad n=2 \quad\Rightarrow\quad (-1)^2\cdot\frac{x^{15}}{5}=\frac{f^{15)}(0)}{15!}\cdot x^{15} \quad\Leftrightarrow\quad f^{15)}(0)=\frac{15!}{5}=3\cdot 14!$$

4.- Aurkitu, analitiko eta grafikoki, hurrengo funtzioaren definizio-eremua:

$$f(x,y)=\frac{\arctan\left(|y-x|\right)\cdot \mathrm{L}\left(1-y\right)}{\left(x^2-2y^2\right)\cdot\sqrt{y-x^2+1}}$$

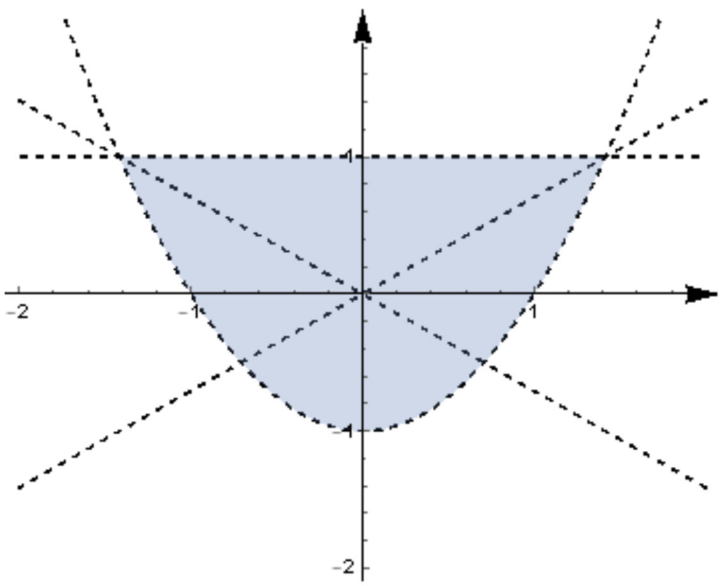
(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 1-y>0,\ x^2-2y^2\neq 0,\ y-x^2+1>0\right\}$$

$1-y>0 \quad \Leftrightarrow \quad y<1$

$$x^2-2y^2\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2\neq 2y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y\neq \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ y\neq -\dfrac{x}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$y-x^2+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad y>x^2-1$



5.- $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \forall (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik,**

a) Aztertu ea diferentziagarria den (0,0) puntuan.

b) Kalkulatu bere deribatu direkzionala (0,0) puntuan, $y=3x-1$ **zuzenaren norabidean.**

(2 puntu)

a) (0,0) puntuko deribatu partzialak kalkulatzen hasiko gara:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{\sqrt{h^2}}}{h}=0$$

Eta, simetriaz, $f'_y(0,0)=0$

Orain, diferentziagarria izateko baldintza beharrezkoa eta nahikoa erabiliko dugu:

f diferentziagarria da (0,0) puntuan

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Hau da:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|hk|}{h^2+k^2}\overset{(1)}{=}\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho^2\cdot|\cos\theta\cdot\sin\theta|}{\rho^2}=\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}|\cos\theta\cdot\sin\theta| \quad\Rightarrow \nexists$$

Beraz, *f* ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

b) $y=3x-1$ zuzenaren norabide-bektore bat $\vec{u}=(1,3)$ da, eta, unitario bihurtuz,

$$\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

f diferentziagarria ez denez (0,0) puntuan, deribatu direkzionala definizioa erabiliz kalkulatu behar dugu:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\lambda h_1,\lambda h_2)-f(0,0)}{\lambda}\text{, non }\vec{u}=\left(h_1,h_2\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

Beraz,

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\frac{\lambda^2\cdot h_1\cdot h_2}{\sqrt{\left(\lambda h_1\right)^2+\left(\lambda h_2\right)^2}}}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^2\cdot h_1\cdot h_2}{\lambda\cdot\sqrt{\lambda^2}}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda\cdot h_1\cdot h_2}{|\lambda|}=\begin{cases}h_1\cdot h_2,\text{ baldin eta }\lambda\to 0^+\\ -h_1\cdot h_2,\text{ baldin eta }\lambda\to 0^-\end{cases}$$

Beraz, $\nexists\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}$

6.- $f = f(x,y)$ **funtzioa** $P(1,2)$ **puntuan diferentziagarria dela jakinda, eta** $\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_P = -1$ **eta** $\left.\frac{df}{d\vec{v}}\right|_P = 1$**,** $\vec{u} = (2,0)$ **eta** $\vec{v} = (0,3)$ **bektoreak izanik, hurrengoa eskatzen da:**

a) **Kalkulatu funtzioaren aldakuntzarik azkarrena** $P(1,2)$ **puntuan.**

b) **Adierazi zein norabidetan lortzen den aldakuntza máximo hori.**

c) **Kalkulatu *f* funtzioaren deribatua** $P(1,2)$ **puntuan, OY ardatzaren norabide positiboarekin** $\pi/3$ **radianeko angelua osatzen duen norabidean.**

(1.5 puntu)

a) $\vec{u}(2,0)$ eta $\vec{v}(0,3)$ bektoreak unitario bihurtuz, $\vec{u}(1,0)$ eta $\vec{v}(0,1)$ ditugu. Orduan:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_P = -1 = f'_x(P), \text{ eta, } \left.\frac{df}{d\vec{v}}\right|_P = 1 = f'_y(P)$$

Eta, funtzioaren aldakuntzarik azkarrena $P(1,2)$ puntuan $= \left|\vec{\nabla} f(P)\right| = \sqrt{2}$

b) Aldakuntza maximoa gradiente bektorearen norabidean lortzen da: $\vec{\nabla} f(P) = (-1,1)$.

c) OY ardatzaren norabide positiboarekin $\pi/3$ radianeko angelua osatzen duen norabidea hurrengo bektore unitarioak adierazten du:

$$\vec{u} = \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Eta, *f* direntziagarria denez, $\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_P = \vec{\nabla} f(P) \cdot \vec{u} = (-1,1) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

7.- $xy + xz^3 + zy + 1 = 0$ **ekuazioa emanik,**

a) x **eta** y **aldagai errealeko** z **funtzio erreala inplizituki definitzen du** $P(x,y,z) = (-1,1,0)$ **puntuaren ingurune batean?**

b) Eman $z = z(x,y)$ **gainazalari dagokion plano ukitzailearen ekuazioa** P **puntuan.**

c) Aurkitu $z''_{y^2}(P)$**.**

(2.5 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen denentz aztertuko dugu. $F(x,y,z) = xy + xz^3 + zy + 1 = 0$ ekuazioa eta $P(x,y,z) = (-1,1,0)$ puntua emanik:

i. $F(P) = 0 \quad \Rightarrow$ *P* puntuaren ingurunean funtzio inpliziturik existitzen dela dakigu.

ii. $F'_x = y + z^3 \quad F'_y = x + z \quad F'_z = 3xz^2 + y$ jarraituak direnez, existituko den funtzio inplizituaren deribatu partzialak ere jarraituak direla dakigu.

iii. $F'_z(P) = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad z = z(x,y)$ funtzio inplizitua definitzen duela ekuazioak ondorioztatzen da.

Beraz, $P(x,y,z) = (-1,1,0)$ puntuaren ingurune batean, $F(x,y,z) = 0$ ekuazioak $z = z(x,y)$ funtzio inplizitua definitzen du, non:

a) $F(x,y,z(x,y)) = 0$

b) $z = z(x,y)$ diferentziagarria da

c) $z(-1,1) = 0$

b) $z = z(x,y)$ gainazalari dagokion plano ukitzailearen ekuazioa *P* puntuan:

$$z - z(-1,1) = z'_x(-1,1)\cdot(x+1) + z'_y(-1,1)\cdot(y-1)$$

$F(x,y,z(x,y)) = 0$ ekuazioan *x*-rekiko eta *y*-rekiko deribatuz:

$$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0 \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} F'_x(P) + F'_z(P)\cdot z'_x(-1,1) = 0 \Leftrightarrow 1 + z'_x(-1,1) = 0 \Leftrightarrow z'_x(-1,1) = -1$$

$$F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0 \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} F'_y(P) + F'_z(P)\cdot z'_y(-1,1) = 0 \Leftrightarrow -1 + z'_y(-1,1) = 0 \Leftrightarrow z'_y(-1,1) = 1$$

$$z = -(x+1) + (y-1) \quad \Leftrightarrow \quad z = -x + y - 2$$

c) $F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0$ ekuazioan *y*-rekiko deribatuko dugu $z''_{y^2}(P)$ lortzeko. Hau da:

$$F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + z + \left(3xz^2 + y\right)\cdot z'_y = 0$$ *y*-rekiko deribatuz:

$$z'_y + \left(6xz \cdot z'_y + 1\right)\cdot z'_y + \left(3xz^2 + y\right)\cdot z''_{y^2} = 0 \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} 1 + 1 + z''_{y^2}(-1,1) = 0 \Leftrightarrow z''_{y^2}(-1,1) = -2$$

8.- $f(x,y)=x^2+y^2-6x-8y+7$ **funtzioa emanik:**

a) Kalkulatu bere mutur erlatiboak bere definizio-eremu osoan.

b) Kalkulatu funtzioaren maximo eta minimo absolutuak hurrengo multzoan:

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\le 1\right\}$$

(1.5 puntu)

a) Puntu kritikoak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left.\begin{array}{lll} f'_x(x,y)=2x-6=0 & \Leftrightarrow & x=3 \\ f'_y(x,y)=2y-8=0 & \Leftrightarrow & y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow P=(3,4) \text{ puntu kritiko bakarra da.}$$

Sailkatzeko, $d^2f(P)$ -ren zeinua aztertuko dugu:

$$\left.\begin{array}{l} f''_{x^2}(x,y)=2 \\ f''_{y^2}(x,y)=2 \\ f''_{xy}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d^2f(P)=2(dx)^2+2(dy)^2>0 \quad \Rightarrow \quad P \text{ minimo erlatiboa da.}$$

b) f funtzio jarraitua da $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, eta M multzo itxi eta mugatua da. Beraz, Weiertrass-en teoremak ziurtatzen du multzo horretan f-ren maximo eta minimo absolutuak daudela.

Lehen lortutako puntu kritikoa ez dago M multzoan, beraz ezin da maximo eta minimo absolutua izan (multzo horretan).

Orain, M-ren mugan egon daitezkeen puntu kritikoak lortu behar ditugu. Hauek, orduan, puntu kritiko baldintzatuak dira, $x^2+y^2=1$ ekuazioa bete behar dutelako. Lagrangeren biderkatzaileen metodoa erabiliz, hurrengo funtzio laguntzailearen puntu kritikoak kalkulatuko ditugu:

$$w(x,y)=x^2+y^2-6x-8y+7+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

$$\left\{\begin{array}{lll} w'_x=2x-6+2\lambda x=0 & \Leftrightarrow & x(1+\lambda)-3=0 \\ w'_y=2y-8+2\lambda y=0 & \Leftrightarrow & y(1+\lambda)-4=0 \\ x^2+y^2=1 & & \end{array}\right. \Rightarrow y=\frac{4x}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{25x^2}{9}=1 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{3}{5}$$

Orduan, bi puntu kritiko ditugu: $A=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ eta $B=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$

Eta, funtzioak puntu horietan hartzen dituen balioak kalkulatuz:

$$f(A)=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}-\frac{18}{5}-\frac{32}{5}+7<f(B)=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}+\frac{18}{5}+\frac{32}{5}+7$$

Beraz, A minimo eta B maximo absolutuak dira M multzoan.

2024ko maiatzak 20an Kalkulua

OHIKO DEIALDIKO AZTERKETA (3. partziala)

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira

Iraupena: Ordu bat eta erdi

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

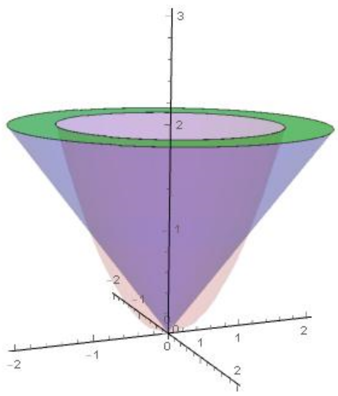
1.- a) Kalkulatu $V \equiv \begin{cases} z \le x^2 + y^2 \\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \\ z \le 2 \end{cases}$ **solidoaren bolumena.**

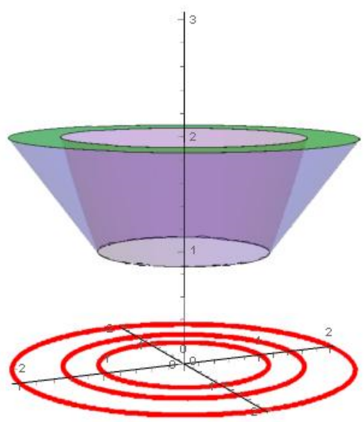
b) Kalkulatu *V*-ren mugako $z = x^2 + y^2$ **gainazalaren zatiaren azalera.**

(3 puntu)

a) $Bol(V) = \iiint\limits_V dxdydz$

V solidoa eskuineko marrazkian erakusten da:





Marrazkiak egiteko hurrengo kalkuluak egin behar izan ditugu:

$z = x^2 + y^2$ paraboloidearen eta $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konoaren arteko ebakidura:

$$z = x^2 + y^2 = z^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0,0) \text{ puntua} \\ z = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \text{kurba} \end{cases}$$

$z = x^2 + y^2$ paraboloidearen eta $z = 2$ planoaren arteko ebakidura $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$ kurba

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konoaren eta $z = 2$ planoaren arteko ebakidura $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$ kurba

Solidoaren mugak zilibdrikoetan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} z \le \rho^2 \\ z \ge \rho \\ z \le 2 \end{cases}$

Eta, aurreko ebakidura-kubak: $\begin{cases} \rho = 1 \\ z = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ z = 2 \end{cases}$ eta $\begin{cases} \rho = 2 \\ z = 2 \end{cases}$ (marrazkian, gorriz, euren propiekzioak erakusten dira).

Beraz, mugak bi ordenatan idatz aditezke:

$V \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le \rho \le \sqrt{2} \\ \rho \le z \le \rho^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ \sqrt{2} \le \rho \le 2 \\ \rho \le z \le 2 \end{cases}$, beraz, bi integral planteatu beharko genituzke.

Edo, $V \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le z \le 2 \\ \sqrt{z} \le \rho \le z \end{cases}$, integral bakar baten bitartez.

Orduan, bigarren planteamendua aukeratuko dugu:

$$Bol(V) = \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{\sqrt{z}}^{z} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta = 2\pi \int_1^2 \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_{\sqrt{z}}^{z} dz = \pi \int_1^2 \left(z^2 - z \right) dz = \pi \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right)_1^2 = \pi \left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5\pi}{6}$$

b) V-ren mugako $z = x^2 + y^2$ gainazalaren zatiaren azalera $= \iint_S dS = \iint_{R_{xy}} \left| \vec{N} \right| dxdy$

non $S \equiv z = x^2 + y^2 \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv 1 \le x^2 + y^2 \le 2$

Orduan, $\vec{N} = (-2x, -2y, 1) \quad \Rightarrow \quad \left| \vec{N} \right| = \sqrt{1 + 4\left(x^2 + y^2 \right)}$

Eta, polarretan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le \rho \le \sqrt{2} \end{cases}$

Beraz:

$$Azalera(S) = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \rho\sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho \, d\theta = 2\pi \left. \frac{\left(1 + 4\rho^2\right)^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{1}{8} \right|_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6}\left(27 - 5\sqrt{5} \right)$$

2.- Izan bedi hurrengo bi gainazalek osaturiko *S* gainazala, *V* solidoaren muga:

$$\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+z^2=4 \ \text{ non } \ -2\le z\le 1 \\ S_2 \equiv x^2+y^2+z^2=4z \ \text{ non } \ 1\le z\le 4 \end{cases}$$

Eta, izan bedi $\vec{F}(x,y,z)=y\cdot\vec{i}+x^2\cdot\vec{k}$ **eremu bektoriala.**

a) Kalkulatu $\vec{F}$ **-ren zirkulazioa, aurreko bi gainazalen arteko *C* ebakidura-kurban zehar, noranzko positiboan ibilitakoa.**

b) Kalkulatu *S* gainazaletik irteten den $\vec{F}$ **-ri dagokion fluxua, eta, baita** S_1 **zatitik irteten dena ere.**

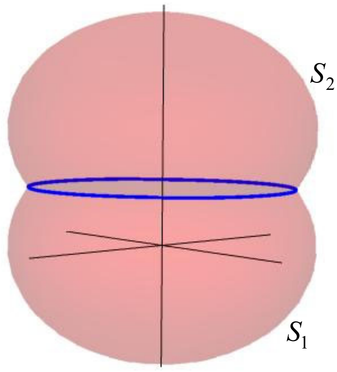
(3 puntu)

a) $\begin{cases} S_1 \equiv x^2+y^2+z^2=4 \ \text{ non } \ -2\le z\le 1 \\ S_2 \equiv x^2+y^2+z^2=4z \ \text{ non } \ 1\le z\le 4 \end{cases}$

gainazalen arteko *C* ebakidura-kurba kalkulatzen hasiko gara:

$x^2+y^2+z^2=4=4z \quad \Leftrightarrow \quad z=1$

Orduan, $C\equiv\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases}$ (urdinez marrazturikoa).



$$\vec{F}\text{-ren zirkulazioa } =\oint_C \vec{F}d\vec{r}=\oint_C \left(y\cdot dx+x^2\cdot dz\right)\overset{(1)}{=}\int_0^{2\pi} -3\sin^2 t dt=-\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2t))dt=$$

$$=-\frac{3}{2}\left(t-\frac{\sin(2t)}{2}\right)_0^{2\pi}=-3\pi$$

(1) Parametrizazio naturala: $C\equiv\begin{cases} x=\sqrt{3}\cdot\cos t \\ y=\sqrt{3}\cdot\sin t \quad 0\le t\le 2\pi \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=-\sqrt{3}\cdot\sin t dt \\ dy=\sqrt{3}\cdot\cos t dt \\ dz=0 \end{cases}$

<u>Beste modu batera ere egin daiteke</u>:

$\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan, eta, *C* kurba itxia, sinplea eta leuna denez, Stokes-en teorema erabil dezakegu:

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r}=\iint_{S_3}\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)d\vec{S}$$

non $S_3\equiv z=1 \quad \forall(x,y)\in R_{xy}\equiv x^2+y^2\le 3$, *C* kurbak mugatzen du, eta, $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)=(0,-2x,-1)$. Orduan:

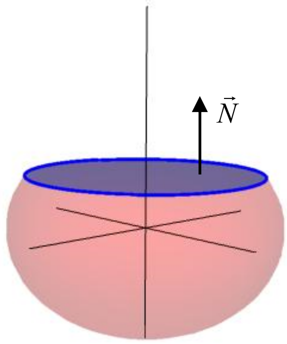
$$\oint_C \vec{F}d\vec{r}=\iint_{S_3}\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)d\vec{S}=\pm\iint_{R_{xy}}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N}\right)dxdy\overset{(2)}{=}-\iint_{R_{xy}}dxdy=-Azalera\left(R_{xy}\right)=-3\pi$$

b) $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan, eta, S gainazal itxia denez (V solidoa mugatzen duena), Gauss-en teorema erabil dezakegu:

$$S\text{-tik irteten den } \vec{F}\text{-ren fluxua} = \iint_S \vec{F}d\vec{S} = \iiint_V \underbrace{div\left(\vec{F}\right)}_{=0} dxdydz = 0$$

Eta, S_1 zatitik irteten den $\vec{F}$-ren fluxua $= \iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}} \left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dxdy$ integralaren bitartez kalkula dezakegu. Baina, kontuan izanik $div\left(\vec{F}\right)=0$, S_1 gainazala aurreko atalean definituriko S_3 planoaren bitartez itxiko dugu, berriro Gauss erabili ahal izateko (garapen hau errazagoa izango baita).

Beraz, har dezagun berriro $S_3 \equiv z=1 \quad \forall(x,y)\in R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 3$, eta, defini dezagun $S' = S_1 \cup S_3$ gainazal itxia (marrazkian erakusten den V' solidoa mugatzen duena).



Honela:

S'-tik irteten den $\vec{F}$-ren fluxua =

$$= \iint_{S'} \vec{F}d\vec{S} = \iiint_{V'} \underbrace{div\left(\vec{F}\right)}_{=0} dxdydz = 0 = \iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{F}d\vec{S}$$

Eta, $\iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S} = -\iint_{S_3} \vec{F}d\vec{S}$

Azken gainazal-integrala kalkulatuko dugu:

$$\iint_{S_3} \vec{F}d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}} \left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)dxdy \overset{(2)}{=} \iint_{R_{xy}} x^2 dxdy \overset{(3)}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 \cos^2\theta \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{\sqrt{3}} d\theta =$$

$$= \frac{9}{8}\int_0^{2\pi} \left(1+\cos(2\theta)\right) d\theta = \frac{9}{8}\left(t + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)_0^{2\pi} = \frac{9\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S} = -\frac{9\pi}{4}$$

(2) $\vec{N} = (0,0,1)$ eta $\gamma < \frac{\pi}{2}$

(3) Polarretan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad R_{xy} \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le \sqrt{3} \end{cases}$

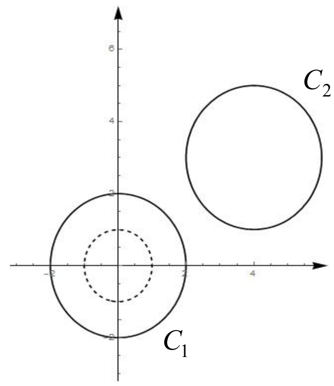
3.- Kalkulatu $\oint_C \left(x\sqrt{x^2+y^2-1}\ dx + y\sqrt{x^2+y^2-1}\ dy \right)$ **lerro-integrala, noranzko positiboan ibilitako hurrengo kurbetan zehar:**

a) $C_1 \equiv x^2+y^2=4$ **b)** $C_2 \equiv (x-4)^2+(y-3)^2=4$

(2 puntu)

$$I = \oint_C \left(x\sqrt{x^2+y^2-1}\ dx + y\sqrt{x^2+y^2-1}\ dy \right) = \oint_C \vec{F} d\vec{r}$$

non $\vec{F}(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2-1}\cdot\vec{i} + y\sqrt{x^2+y^2-1}\cdot\vec{j}$, eta, bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak diren $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2-1>0\right\}$, hau da, zulo bat duen eremuan. Eta,



$$\left\{ \begin{array}{l} X(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2-1} \Rightarrow X'_y = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \\ Y(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2-1} \Rightarrow Y'_x = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \end{array} \right. \Rightarrow X'_y = Y'_x$$

Beraz, $\forall C \subset D$ kurba itxia, sinplea eta leuna (edo zatika leuna),

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \left\{ \begin{array}{l} 0, C \text{ kurbak ez badu zuloa inguratzen} \\ k \text{ (konstante berdina) } C \text{ kurbak zuloa inguratzen badu} \end{array} \right. \qquad (*)$$

a) $C_1 \equiv x^2+y^2=4$ kurbak zuloa inguratzen du:

$$\oint_{C_1} \vec{F} d\vec{r} \overset{(1)}{=} \oint_{C_1} \left(x\sqrt{3}\ dx + y\sqrt{3}\ dy \right) \overset{(2)}{=} \int_a^a x\sqrt{3}\ dx + \int_b^b y\sqrt{3}\ dy = 0$$

(1) $C_1 \equiv x^2+y^2=4 \ \Rightarrow \ \sqrt{x^2+y^2-1} = \sqrt{3}$

(2) $C_1 \equiv x^2+y^2=4$ kurba itxia denez, kartesiarretan parametrizatzen badugu hasierako eta amaierako puntua berdina da ($(x,y)=(a,b)$, adibidez)

Parametrizazio naturala erabiliz ere egin daiteke:

$$C_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{array} \right. 0 \le t \le 2\pi \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} dx = -2\sin t\, dt \\ dy = 2\cos t\, dt \end{array} \right.$$

Orduan, $\oint_{C_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(2\cos t\sqrt{3}(-2\sin t) + 2\sin t\sqrt{3}(2\cos t) \right) dt = 0$

b) $C_2 \equiv (x-4)^2+(y-3)^2=4$ kurbak ez du zuloa inguratzen $\Rightarrow \oint_{C_2} \vec{F} d\vec{r} = 0$

<u>Oharra</u>: a) atalerako (*) emaitza ez da beharrezkoa, integrala erraz kalkula daitekeelako. Hala ere, ezin da Green-en teorema erabili (*D* eremua sinpleki konexua ez baita), eta, arrazoi beragatik, ezin da ondorioztatu integrala bidearekiko independentea denik, nahiz eta $X'_y = Y'_x$.

b) atalean, berriz, ez badugu (*) emaitza erabiltzen, eta, integrala $C_2 \equiv (x-4)^2+(y-3)^2=4$ kurban zehar kalkulatzen saiatzen bagara, kalkuluak luzatzen zaizkigu. Kasu horretan, parametrizazio naturala erabiliz:

$$C_2 \equiv \begin{cases} x = 4+2\cos t \\ y = 3+2\sin t \end{cases} 0 \le t \le 2\pi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dx = -2\sin t dt \\ dy = 2\cos t dt \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+y^2-1} = \sqrt{16+16\cos t+4\cos^2 t+9+12\sin t+4\sin^2 t-1} = \sqrt{28+16\cos t+12\sin t}$$

Eta,

$$x\sqrt{x^2+y^2-1}\;dx + y\sqrt{x^2+y^2-1}\;dy =$$

$$=\Big((4+2\cos t)(-2\sin t)\sqrt{28+16\cos t+12\sin t}+(3+2\sin t)2\cos t\sqrt{28+16\cos t+12\sin t}\Big)dt =$$

$$=\Big((-8\sin t-4\sin t\cos t+6\cos t+4\sin t\cos t)\sqrt{28+16\cos t+12\sin t}\Big)dt =$$

$$=(-8\sin t+6\cos t)\sqrt{28+16\cos t+12\sin t}\;dt$$

Orduan,

$$\oint_{C_2} \vec{F}d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-8\sin t+6\cos t)\sqrt{28+16\cos t+12\sin t}\;dt =$$

$$= \left.\frac{\left(28+16\cos t+12\sin t\right)^{3/2}}{3}\right|_0^{2\pi} = 0$$

Bestalde, behin kalkulatu integralak, (*) emaitzetik honako hau ondorioztatzen dugu:

$\forall C \subset D$ kurba itxia, sinplea eta leuna (edo zatika leuna),

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \begin{cases} 0, \; C \text{ kurbak ez badu zuloa inguratzen} \\ k=0, \; C \text{ kurbak zuloa inguratzen badu} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \oint_C \vec{F}d\vec{r} = 0$$

Hau da, D eremuan $\int \vec{F}d\vec{r}$ bidearekiko independentea dela frogatu dugu.

4.- $\vec{F}(x,y)=\left(3y-e^{\cos x}\right)\cdot\vec{i}+(x+e^{y})\cdot\vec{j}$ **eremu bektoriala emanik, kalkulatu** $\int_C \vec{F}d\vec{r}$**,** $C_1\equiv x=y^2$ **eta** $C_2\equiv x=1$ **kurbek osaturiko** ***C*** **kurba itxian zehar, noranzko positiboan ibilitakoa.**

(2 puntu)

$$I=\oint_C \vec{F}d\vec{r}=\oint_C\left(\left(3y-e^{\cos x}\right)\cdot dx+(x+e^{y})\cdot dy\right)=\int_{C_1}\vec{F}d\vec{r}+\int_{C_2}\vec{F}d\vec{r}$$

Integral honetan, $\int_{C_1} e^{\cos x}dx$ batugaia ezin izango dugu kalkulatu.

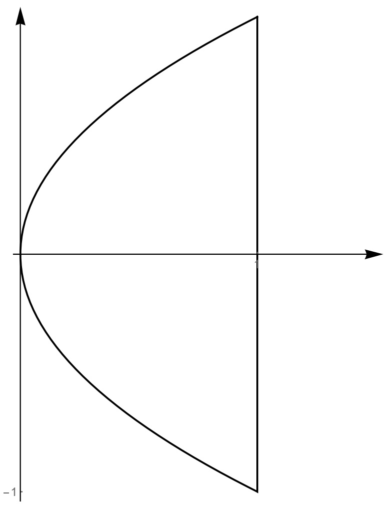
C kurba itxia, sinplea eta zatika leuna da, eta, $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^2$ osoan beraz, Green-en teorema erabil dezakegu:

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r}=\iint_R\left(Y'_x-X'_y\right)dxdy$$

non *R C* kurbak mugaturiko eskualdea den:

$$R\equiv\begin{cases}-1\le y\le 1\\ y^2\le x\le 1\end{cases}$$

Orduan:



$$\begin{cases}X(x,y)=3y-e^{\cos x} & \Rightarrow\quad X'_y=3\\ Y(x,y)=x+e^{y} & \Rightarrow\quad Y'_x=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \oint_C \vec{F}d\vec{r}=-2\iint_R dxdy=-2\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}dx\,dy=-2\int_{-1}^{1}\left(1-y^2\right)dy=$$

$$=-2\left(y-\frac{y^3}{3}\right)_{-1}^{1}=-2\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=-\frac{8}{3}$$